解答篇

單元 1 乘法公式

★ 國中基礎能力檢定 P.4

簡答

1. -4080　2. 7760　3. 64　4. 625　5. -1
6. 88　7. 12　8. 0　9. 7　10. (A)　11. (B)　12. (C)

詳解

1. $(-15)\times(-16)\times(-17)$
$=-(15\times16\times17)$
$=-4080$

2. $(88.8)^2-(11.2)^2=(88.8+11.2)\times(88.8-11.2)$
$=100\times77.6$
$=7760$

3. $(3-\sqrt{5})^3(3+\sqrt{5})^3=[(3+\sqrt{5})\times(3-\sqrt{5})]^3$
$=[3^2-(\sqrt{5})^2]^3$
$=4^3$
$=64$

4. $108\times25^3-2699\times25^2$
$=25^2\times(108\times25-2699)$
$=625\times(2700-2699)$
$=625$

5. $\dfrac{2019^2-2\times2019+1}{2018}-\dfrac{108^2+2\times108\times1911+1911^2}{2019}$
$=\dfrac{(2019-1)^2}{2018}-\dfrac{(108+1911)^2}{2019}$
$=\dfrac{2018^2}{2018}-\dfrac{2019^2}{2019}$
$=2018-2019=-1$

6. $a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$
$=10^2+2\times(-6)$
$=100-12$
$=88$

7. $\dfrac{\beta+1}{\alpha}+\dfrac{\alpha+1}{\beta}=\dfrac{\beta^2+\beta+\alpha^2+\alpha}{\alpha\beta}$
$=\dfrac{[(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta]+(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}$
$=\dfrac{(6^2-2\times3)+6}{3}$
$=12$

8. $(a^2+2a+1)+\left(b^2+b+\dfrac{1}{4}\right)+\left(c^2-c+\dfrac{1}{4}\right)$
$+(d^2-2d+1)=0$
$\Rightarrow(a+1)^2+\left(b+\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(c-\dfrac{1}{2}\right)^2+(d-1)^2=0$
$\because a$，b，c，d 為實數
$\therefore a+1=0$，且 $b+\dfrac{1}{2}=0$，且 $c-\dfrac{1}{2}=0$，
且 $d-1=0$
得 $a=-1$，$b=-\dfrac{1}{2}$，$c=\dfrac{1}{2}$，$d=1$
所求 $a+b+c+d=(-1)+\left(-\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{1}{2}+1$
$=0$

9. $x^2-3x+1=0\Rightarrow x-3+\dfrac{1}{x}=0\Rightarrow x+\dfrac{1}{x}=3$
所求 $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2=3^2-2=7$

10. 利用平方差公式 $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$
$A=(3^2-1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)(3^{16}+1)$
$=(3^4-1)(3^4+1)(3^8+1)(3^{16}+1)$
$=(3^8-1)(3^8+1)(3^{16}+1)$
$=(3^{16}-1)(3^{16}+1)=3^{32}-1$
檢查 $3^1=3$，$3^2=9$，$3^3=27$，$3^4=81$，
$3^5=243$，……
可知 3^n 的個位數依 3，9，7，1，3，9，7，1，
……循環
則 3^{32} 的個位數為 1
即 $A=3^{32}-1$ 的個位數字為 0
故選(A)

11. 鋪色部分面積為 $(a+b)^2-\dfrac{ab}{2}\times4=a^2+b^2$
故選(B)

12. 所求為 $\dfrac{2.5\text{ 微米}}{50\text{ 奈米}}=\dfrac{2.5\times10^{-6}\text{ 公尺}}{50\times10^{-9}\text{ 公尺}}$
$=\dfrac{2500\times10^{-9}\text{ 公尺}}{50\times10^{-9}\text{ 公尺}}$
$=50$（倍）
故選(C)

高中先修課程 P.7

例題 1

(1) $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$
$=5^2-2\times(-3)$
$=31$

(2) $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$
$=5^3-3\times(-3)\times5$
$=170$

練習 1

(1) $a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$
$=3^2+2\times1$
$=11$

(2) $a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$
$=3^3+3\times1\times3$
$=36$

例題 2

(1) $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$
$=3^2-2$
$=7$

(2) $x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)$
$=3^3-3\times3$
$=18$

練習 2

(1) $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2$
$=5^2+2=27$

(2) $x^3-\frac{1}{x^3}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\frac{1}{x}\right)$
$=5^3+3\times5$
$=140$

先修銜接能力檢定 P.9

簡答

1. 970300　2. 510　3. 18　4. 123　5. 18
6. 1023　7. 665　8. (D)

詳解

1. $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$
$=(99+1)^3-3\times99\times1\times(99+1)$
$=100^3-3\times99\times100$
$=970300$

2. $a^4b-ab^4=ab(a^3-b^3)$
$=ab[(a-b)^3+3ab(a-b)]$
$=3\times(5^3+3\times3\times5)$
$=510$

3. $\frac{b^2}{a}+\frac{a^2}{b}=\frac{b^3+a^3}{ab}$
$=\frac{(a+b)^3-3ab(a+b)}{ab}$
$=\frac{3^3-3\times1\times3}{1}$
$=18$

4. $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$
$=3^2-2=7$
$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)$
$=3^3-3\times3=18$
所求 $x^5+\frac{1}{x^5}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)-\left(x+\frac{1}{x}\right)$
$=7\times18-3$
$=123$

5. $a^6+\frac{1}{a^6}=\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)^3-3\times a^2\times\frac{1}{a^2}\times\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)$
$=3^3-3\times1\times3=18$

6. 令 $A=2^9+2^8+2^7+\cdots\cdots+2+1$
$\Rightarrow(2-1)A=(2-1)\times(2^9+2^8+2^7+\cdots\cdots+2+1)$
$=2^{10}-1$
$\Rightarrow A=2^{10}-1=1024-1=1023$

7. 令 $A=3^5+3^4\times2+3^3\times2^2+3^2\times2^3+3\times2^4+2^5$
$\Rightarrow(3-2)A$
$=(3-2)\times(3^5+3^4\times2+3^3\times2^2+3^2\times2^3+3\times2^4+2^5)$
$=3^6-2^6$
$=729-64$
$=665$
$\Rightarrow A=665$

8. 依題意 $((b^2)^2)^2=81^4$
$\Rightarrow b^8=(3^4)^4$
$\Rightarrow b^8=(3^2)^8$
得 $b=3^2=9$
故選(D)

綜合能力檢定 P.11

簡答

1. (D)　2. $\frac{5}{2}$　3. 40　4. (A)　5. 略

詳解

1. $(99.8)^2=(100-0.2)^2$
$=100^2-2\times100\times0.2+(0.2)^2$
$=9960.04$
故選(D)

2. 公式$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$

$\Rightarrow 1^2=2+2ab$

$\Rightarrow ab=-\dfrac{1}{2}$

所求 $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

$=1^3-3\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)\times 1=\dfrac{5}{2}$

3. 依題意 $a^2-4a+2=0$

$\Rightarrow a-4+\dfrac{2}{a}=0 \Rightarrow a+\dfrac{2}{a}=4$

所求 $a^3+\dfrac{8}{a^3}=\left(a+\dfrac{2}{a}\right)^3-3\times a\times\dfrac{2}{a}\times\left(a+\dfrac{2}{a}\right)$

$=4^3-3\times 2\times 4$

$=40$

4. $a-c=(a-b)+(b-c)$

$=(2+\sqrt{2})+(2-\sqrt{2})=4$

所求 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$=\dfrac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)$

$=\dfrac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]$

$=\dfrac{1}{2}[(2+\sqrt{2})^2+(2-\sqrt{2})^2+4^2]$

$=14$

故選(A)

5. $\alpha^n-\beta^n=0$

$\Rightarrow(\alpha-\beta)\times(\alpha^{n-1}+\alpha^{n-2}\beta+\alpha^{n-3}\beta^2+\cdots\cdots$

$+\alpha\beta^{n-2}+\beta^{n-1})=0$

$\because \alpha>0$ 且 $\beta>0$

$\therefore \alpha^{n-1}+\alpha^{n-2}\beta+\cdots\cdots+\alpha\beta^{n-2}+\beta^{n-1}>0$ 恆成立

可得 $\alpha-\beta=0$

即 $\alpha=\beta$

單元 2 根式運算

★ 國中基礎能力檢定 P.15

簡答

1. 6　2. $2\sqrt{3}$　3. 720　4. (D)　5. 10　6. 3
7. (A)　8. $\sqrt{2}+2$　9. (C)　10. (D)　11. $14+6\sqrt{3}$
12. $\dfrac{5\sqrt{10}}{3}$

詳解

1. 依題意 $x^2-12x+45=(\pm 3)^2$

$\Rightarrow x^2-12x+36=0$

$\Rightarrow(x-6)^2=0$

$\Rightarrow x=6$

2. $4\sqrt{12}+2\sqrt{27}-3\sqrt{48}$

$=4(2\sqrt{3})+2(3\sqrt{3})-3(4\sqrt{3})$

$=8\sqrt{3}+6\sqrt{3}-12\sqrt{3}$

$=2\sqrt{3}$

3. $\sqrt{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{4}\times\sqrt{5}\times\sqrt{6}\times\sqrt{8}\times\sqrt{9}\times\sqrt{10}$

$=\sqrt{2\times3\times4\times5\times6\times8\times9\times10}$

$=\sqrt{2^8\times3^4\times5^2}$

$=2^4\times3^2\times5$

$=720$

4. $a=2\sqrt{6}=\sqrt{24}$

$b=3\sqrt{3}=\sqrt{27}$

$c=4\sqrt{2}=\sqrt{32}$

$\Rightarrow c>b>a$

故選(D)

5. $\sqrt{108-n}$ 為正整數

則 $108-n$ 可以是 1^2，2^2，3^2，4^2，……，10^2，

總共 10 種情形

故符合條件的 n 有 10 個

6. $\sqrt{108\times n}=\sqrt{2^2\times3^3\times n}$

故使得 $\sqrt{108\times n}$ 為正整數的最小 n 值為 3

7. 已知 $-3<a<1$

所求 $\sqrt{(a-1)^2}+\sqrt{(a+3)^2}$

$=|a-1|+|a+3|$

$=(1-a)+(a+3)$

$=4$

故選(A)

8. $\dfrac{2}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{2-\sqrt{2}}+\dfrac{1}{2+\sqrt{2}}$

$=\dfrac{2\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}+\dfrac{2+\sqrt{2}}{(2-\sqrt{2})\times(2+\sqrt{2})}$

$+\dfrac{2-\sqrt{2}}{(2+\sqrt{2})\times(2-\sqrt{2})}$

$=\dfrac{2\sqrt{2}}{2}+\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}+\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$

$=\sqrt{2}+2$

9. 可得 $\overline{OP}=\overline{OB}=\sqrt{6^2+2^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

則 P 之坐標為 $2\sqrt{10}$

故選(C)

10. 螢幕寬度為 $\sqrt{6.1^2-5^2}=\sqrt{12.21}\approx3.5$(吋)

故選(D)

11. 乙之邊長為 $\sqrt{6}$，丙之邊長為 $\sqrt{2}$

得 $\begin{cases}\overline{AD}=\sqrt{6}+\sqrt{2}\\ \overline{CD}=2\sqrt{6}+\sqrt{2}\end{cases}$

故長方形 $ABCD$ 面積為

$(\sqrt{6}+\sqrt{2})\times(2\sqrt{6}+\sqrt{2})=14+6\sqrt{3}$

12. 設 $\overline{DE}=\overline{EF}=x$

在△ABF 中，$\overline{BF}=\sqrt{\overline{AF}^2-\overline{AB}^2}$

$=\sqrt{5^2-3^2}=4$

故 $\overline{CF}=1$

在△EFC 中，$x^2=(3-x)^2+1^2 \Rightarrow x=\dfrac{5}{3}$

在△AEF 中，$\overline{AE}=\sqrt{5^2+x^2}$

$=\sqrt{5^2+\left(\dfrac{5}{3}\right)^2}=\dfrac{5\sqrt{10}}{3}$

高中先修課程 P.18

例題 1

(1) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\sqrt{2}+\sqrt{1}$

$=\sqrt{2}+1$

(2) $\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{2}-\sqrt{1}$

$=\sqrt{2}-1$

(3) $\sqrt{11+4\sqrt{6}}=\sqrt{11+2\sqrt{24}}$

$=\sqrt{8}+\sqrt{3}$

$=2\sqrt{2}+\sqrt{3}$

(4) $\sqrt{14-\sqrt{96}}=\sqrt{14-2\sqrt{24}}$

$=\sqrt{12}-\sqrt{2}$

$=2\sqrt{3}-\sqrt{2}$

練習 1

(1) $\sqrt{4+2\sqrt{3}}=\sqrt{3}+\sqrt{1}$

$=\sqrt{3}+1$

(2) $\sqrt{4-2\sqrt{3}}=\sqrt{3}-\sqrt{1}$

$=\sqrt{3}-1$

(3) $\sqrt{18+6\sqrt{5}}=\sqrt{18+2\sqrt{45}}$

$=\sqrt{15}+\sqrt{3}$

(4) $\sqrt{14-\sqrt{180}}=\sqrt{14-2\sqrt{45}}$

$=\sqrt{9}-\sqrt{5}$

$=3-\sqrt{5}$

例題 2

(1) 依算幾不等式得 $\dfrac{x+y}{2}\geq\sqrt{xy}$

$\Rightarrow \dfrac{8}{2}\geq\sqrt{xy}$

$\Rightarrow 4^2\geq(\sqrt{xy})^2 \Rightarrow xy\leq 16$

故 xy 的最大值為 16

(2) 依算幾不等式得 $\dfrac{x+y}{2}\geq\sqrt{xy}$

$\Rightarrow \dfrac{x+y}{2}\geq\sqrt{16}$

$\Rightarrow \dfrac{x+y}{2}\geq 4 \Rightarrow x+y\geq 8$

故 $x+y$ 的最小值為 8

練習 2

(1) 依算幾不等式得 $\dfrac{x+2y}{2}\geq\sqrt{x\cdot 2y}$

$\Rightarrow \dfrac{8}{2}\geq\sqrt{2xy}$

$\Rightarrow 4^2\geq(\sqrt{2xy})^2 \Rightarrow 16\geq 2xy \Rightarrow xy\leq 8$

故 xy 的最大值為 8

(2) 依算幾不等式得 $\dfrac{3x+y}{2}\geq\sqrt{3x\cdot y}$

$\Rightarrow \dfrac{3x+y}{2}\geq\sqrt{3\times 27}$

$\Rightarrow \dfrac{3x+y}{2}\geq 9 \Rightarrow 3x+y\geq 18$

故 $3x+y$ 的最小值為 18

先修銜接能力檢定 P.20

簡答

1. $2\sqrt{5}-2\sqrt{2}$　2. $\sqrt{5}-1$　3. $\sqrt{10}-3$

4. $4-\sqrt{10}$　5. $\sqrt{6}+\sqrt{2}$　6. 64　7. 9　8. $8\sqrt{6}$

詳解

1. $\dfrac{6}{\sqrt{7+\sqrt{40}}}=\dfrac{6}{\sqrt{7+2\sqrt{10}}}=\dfrac{6}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$

$=\dfrac{6\times(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{(\sqrt{5}+\sqrt{2})\times(\sqrt{5}-\sqrt{2})}$

$=\dfrac{6\times(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{3}=2\times(\sqrt{5}-\sqrt{2})$

$=2\sqrt{5}-2\sqrt{2}$

2. $\sqrt{6-\sqrt{20}}=\sqrt{6-2\sqrt{5}}=\sqrt{5}-\sqrt{1}=\sqrt{5}-1$

3. $\sqrt{14+4\sqrt{10}}=\sqrt{14+2\sqrt{40}}=\sqrt{10}+\sqrt{4}$

$=\sqrt{10}+2=5+(\sqrt{10}-3)$

可得 $a=5$，$b=\sqrt{10}-3$

所求 $b=\sqrt{10}-3$

4. $\sqrt{35-10\sqrt{10}}=\sqrt{35-2\sqrt{250}}=\sqrt{25}-\sqrt{10}$

$=5-\sqrt{10}=1+(4-\sqrt{10})$

可得 $a=1$，$b=4-\sqrt{10}$

所求 $b=4-\sqrt{10}$

5. $\overline{BC}=1 \Rightarrow \overline{BD}=2$ 且 $\overline{CD}=\sqrt{3}$

又 $\overline{AD}=\overline{BD}=2$（∵△$ABD$ 為等腰三角形）

所求 $\overline{AB}=\sqrt{\overline{AC}^2+\overline{BC}^2}=\sqrt{(2+\sqrt{3})^2+1^2}$

$=\sqrt{8+4\sqrt{3}}=\sqrt{8+2\sqrt{12}}$

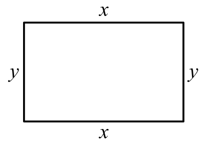
$=\sqrt{6}+\sqrt{2}$

6. 依算幾不等式得 $\dfrac{x^2+y^2}{2}\geq\sqrt{x^2\cdot y^2}$

$\Rightarrow \dfrac{x^2+y^2}{2}\geq xy \Rightarrow x^2+y^2\geq 2xy \Rightarrow x^2+y^2\geq 64$

故 x^2+y^2 的最小值為 64

7. 如右圖，



設長方形的長為 x，寬為 y

則周長為 $2x+2y=12$，

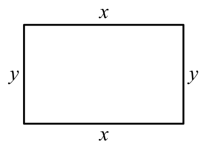
面積為 xy

依算幾不等式得 $\dfrac{2x+2y}{2} \geq \sqrt{2x \cdot 2y}$

$\xrightarrow{\text{平方}} \left(\dfrac{12}{2}\right)^2 \geq 4xy \Rightarrow xy \leq 9$

故面積最大值為 9

8. 如右圖，



設長方形的長為 x，寬為 y

則周長為 $2x+2y$，

面積為 $xy=24$

依算幾不等式得 $\dfrac{2x+2y}{2} \geq \sqrt{2x \cdot 2y}$

$\Rightarrow \dfrac{2x+2y}{2} \geq \sqrt{4xy} \Rightarrow \dfrac{2x+2y}{2} \geq \sqrt{4 \times 24}$

$\Rightarrow 2x+2y \geq 8\sqrt{6}$

故周長最小值為 $8\sqrt{6}$

綜合能力檢定 P.22

簡答

1. 117　2. (B)　3. 50　4. $2\sqrt{2}+2$　5. $\sqrt{2}-1$

詳解

1. $\sqrt{108} \leq \sqrt{a} < 15$

$\Rightarrow \sqrt{108} \leq \sqrt{a} < \sqrt{225}$

滿足條件的 a 可以是 108，109，……，224

共有 117 個

2. $10 < \sqrt{108} < 11$

$\Rightarrow 2029 < 2019 + \sqrt{108} < 2030$

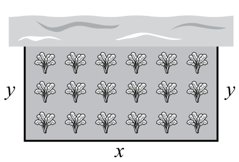
檢查：$\begin{cases} 45^2 = 2025 \\ 46^2 = 2116 \end{cases}$

可知 $45 < \sqrt{2019 + \sqrt{108}} < 46$

且 $\sqrt{2019+\sqrt{108}}$ 最接近 45

故選(B)

3. 如右圖，設長方形的



長為 x，寬為 y

則繩長為 $x+2y=20$，

面積為 xy

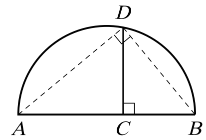
依算幾不等式得 $\dfrac{x+2y}{2} \geq \sqrt{x \cdot 2y}$

$\xrightarrow{\text{平方}} \left(\dfrac{20}{2}\right)^2 \geq (\sqrt{2xy})^2 \Rightarrow 100 \geq 2xy$

$\Rightarrow xy \leq 50$

∴面積最大為 50 平方公尺

4. 依相似定理得



$\overline{CD}^2 = \overline{AC} \times \overline{BC}$

$\Rightarrow \overline{CD} = \pm\sqrt{\overline{AC} \times \overline{BC}}$（取正）

則 $\overline{CD} = \sqrt{(3+2\sqrt{2}) \times 4}$

$= \sqrt{12+8\sqrt{2}}$

$= \sqrt{12+2\sqrt{32}}$

$= \sqrt{8} + \sqrt{4} = 2\sqrt{2}+2$

5. $\overline{BC}=1 \Rightarrow \overline{BD}=\sqrt{2}$ 且 $\overline{CD}=1$

又 $\overline{AD}=\overline{BD}=\sqrt{2}$（∵△$ABD$ 為等腰三角形）

所求 $\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}+1} = \dfrac{1 \times (\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1) \times (\sqrt{2}-1)}$

$= \dfrac{\sqrt{2}-1}{1} = \sqrt{2}-1$

單元 3 數列與級數

★ 國中基礎能力檢定 P.25

簡答

1. 30　2. 2　3. 29　4. 50　5. 16　6. 24

7. (A)(B)(D)　8. 16　9. (1) -2；(2) -8；(3) 9

10. 330　11. (A)　12. 465

詳解

1. 首項 $a_1=100$，公差 $d=98-100=-2$

所求第 36 項 $a_{36} = a_1 + 35d$

$= 100 + 35 \times (-2)$

$= 30$

2. 首項 $a_1=-50$，第 51 項 $a_{51}=50$

由 $a_{51} = a_1 + 50d$

$\Rightarrow 50 = -50 + 50d \Rightarrow d=2$

所求公差 $d=2$

3. 由第三列：3，f，-25 成等差

$\Rightarrow f = \dfrac{3+(-25)}{2} = -11$

由第二行：b，9，f 成等差

$\Rightarrow 9 = \dfrac{b+f}{2} \Rightarrow 9 = \dfrac{b+(-11)}{2}$

$\Rightarrow b=29$

所求 $b=29$

4. 設首項為 a_1，公差為 d

$\begin{cases} a_2 = a_1 + d = 12 \\ a_9 = a_1 + 8d = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 14 \\ d = -2 \end{cases}$

所有項的和為

$\dfrac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$

$= \dfrac{10}{2} \times [2 \times 14 + (10-1) \times (-2)] = 50$

5. 首項 $a_1=-113$，公差 $d=(-105)-(-113)=8$
則第 n 項 $a_n=a_1+(n-1)d$
$=-113+(n-1)\times 8>0$
$\Rightarrow 8(n-1)>113$
$\Rightarrow n>15\frac{1}{8}$
符合條件的最小自然數為 16
故自第 16 項開始為正數

6. 周長為 24，得設三邊長為 $8-d$，8，$8+d$，
其中 $d>0$
直角三角形$\Rightarrow(8+d)^2=8^2+(8-d)^2$
$\Rightarrow d=2$
可得三邊長為 6，8，10
所求面積為 $\frac{6\times 8}{2}=24$

7. (A) ○：公比 $r=1$
(B) ○：公比 $r=-1$
(C) ×：不是等比數列
(D) ○：公比 $r=\frac{1}{2}$
(E) ×：不是等比數列
故選(A)(B)(D)

8. 依題意 $12^2=9\times\alpha\Rightarrow\alpha=16$

9. (1) 公比 $r=\frac{a_3}{a_2}=\frac{-32}{16}=-2$
(2) $a_2=a_1r\Rightarrow 16=a_1\times(-2)\Rightarrow$首項 $a_1=-8$
(3) $a_n=a_1r^{n-1}\Rightarrow -2048=(-8)\times(-2)^{n-1}$
$\Rightarrow(-2)^{n-1}=256\Rightarrow n-1=8$
$\Rightarrow n=9$
$\therefore -2048$ 是第 9 項

10. 已知 $a_6=20$ 且 $d=1$
由 $a_6=a_1+5d\Rightarrow 20=a_1+5\times 1$
$\Rightarrow a_1=15$
故座位總數為 $\frac{n}{2}[2a_1+(n-1)d]$
$=\frac{15}{2}[2\times 15+(15-1)\times 1]$
$=330$(個)

11. 依題意 $n^2=\frac{(n+2)\times[1+(n+2)]}{2}$
$\Rightarrow n^2-5n-6=0$
$\Rightarrow(n-6)\times(n+1)=0$
$\Rightarrow n=6$ 或 $n=-1$(不合)
則全部的球有 $6^2=36$ 個
故選(A)

12. $1+2+3+4+\cdots\cdots+30=\frac{30\times(1+30)}{2}$
$=465$
故大寶總共可以得到 465 元

高中先修課程 P.29

例題 1

(1) 首項 $a_1=1$，$r=2$
$a_n=a_1r^{n-1}\Rightarrow 128=1\times 2^{n-1}$
$\Rightarrow n=8$
此級數共有 8 項
總和為 $\frac{a_1(r^n-1)}{r-1}=\frac{1\times(2^8-1)}{2-1}$
$=255$

(2) 首項 $a_1=2$，公比 $r=-2$
$a_n=a_1r^{n-1}\Rightarrow 128=2\times(-2)^{n-1}$
$\Rightarrow n=7$
此級數共有 7 項
總和為 $\frac{a_1(1-r^n)}{1-r}=\frac{2\times[1-(-2)^7]}{1-(-2)}$
$=86$

練習 1

(1) 首項 $a_1=1$，公比 $r=3$
$a_n=a_1r^{n-1}\Rightarrow 243=1\times 3^{n-1}$
$\Rightarrow 3^{n-1}=3^5$
$\Rightarrow n-1=5$
$\Rightarrow n=6$
此級數有 6 項
總和為 $\frac{a_1(r^n-1)}{r-1}=\frac{1\times(3^6-1)}{3-1}$
$=364$

(2) 首項 $a_1=3$，公比 $r=-3$
$a_n=a_1r^{n-1}\Rightarrow 243=3\times(-3)^{n-1}$
$\Rightarrow(-3)^{n-1}=81$
$\Rightarrow n-1=4$
$\Rightarrow n=5$
此級數共有 5 項
總和為 $\frac{a_1(1-r^n)}{1-r}=\frac{3[1-(-3)^5]}{1-(-3)}$
$=183$

例題 2

(1) $1+2+3+\cdots\cdots+100=\sum_{k=1}^{100}k$
(2) $1+3+5+7+\cdots\cdots+99=\sum_{k=1}^{50}(2k-1)$
(3) $2+2^2+2^3+\cdots\cdots+2^{10}=\sum_{k=1}^{10}2^k$

練習 2

(1) $2+4+6+\cdots\cdots+100=\sum_{k=1}^{50}2k$

(2) $3+3^2+3^3+\cdots\cdots+3^{10}=\sum_{k=1}^{10}3^k$

例題 3

(1) 以單利計息，本利和為

$10000\times(1+5\%\times3)=11500$(元)

(2) 以複利計息，本利和為

$10000\times(1+5\%)^3=10000\times1.157625$

$=11576.25$

≈11576(元)

練習 3

(1) 以單利計息，本利和為

$100000\times(1+2\%\times3)=106000$(元)

(2) 以複利計息，本利和為

$100000\times(1+2\%)^3=100000\times1.061208$

$=106120.8$

≈106121(元)

先修銜接能力檢定 P.32

簡答

1. 45　2. $\frac{15}{8}$　3. $\sum_{k=1}^{10}(3^k+5k)$　4. $\frac{364}{243}$

5. 13310　6. 36410　7. 40211　8. 1073741823

詳解

1. 前 4 項的和 $S_4=\frac{a_1(r^4-1)}{r-1}=\frac{3\times(2^4-1)}{2-1}=45$

2. 前 4 項的和

$$S_4=\frac{a_1(1-r^4)}{1-r}=\frac{3\times\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^4\right]}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{15}{8}$$

3. $(3+5\times1)+(3^2+5\times2)+(3^3+5\times3)+\cdots\cdots$

$+(3^{10}+5\times10)=\sum_{k=1}^{10}(3^k+5k)$

4. 首項 $a_1=2$，公比 $r=-\frac{1}{3}$，此級數共有 6 項

總和為 $\frac{a_1(1-r^6)}{1-r}=\frac{2\times\left[1-\left(-\frac{1}{3}\right)^6\right]}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}=\frac{364}{243}$

5. 以複利計息，本利和為

$10000\times(1+10\%)^3=10000\times1.331$

$=13310$(元)

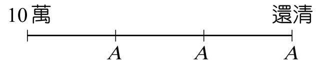
6. 本利和為

$10000\times(1+10\%)^3+10000\times(1+10\%)^2$

$+10000\times(1+10\%)$

$=13310+12100+11000$

$=36410$(元)

7. 

假設每年平均還款 A 元，則

$100000\times(1+10\%)^3$

$=A\times(1+10\%)^2+A(1+10\%)+A$

$\Rightarrow 133100=1.21A+1.1A+A$

$\Rightarrow 133100=3.31A$

$\Rightarrow A=\frac{133100}{3.31}\approx40211.48\approx40211$(元)

故小銘每年平均還款 40211 元

8. $1+2+2^2+2^3+\cdots\cdots+2^{29}$

$=\frac{1\times(2^{30}-1)}{2-1}=2^{30}-1$

$=1073741823$

故二寶總共可以得到 1073741823 元

綜合能力檢定 P.34

簡答

1. (1) 2；(2) -3；(3) 11；(4) 12

2. (1) $\frac{1}{2}$；(2) 80；(3) $\frac{5}{8}$；(4) $\frac{315}{2}$　3. 102

4. 480　5. $\frac{3069}{64}$

詳解

1. (1) 設首項 a_1，公差 d

$$\begin{cases}a_3=a_1+2d=1\\a_5=a_1+4d=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1=-3\\d=2\end{cases}$$

則公差 $d=2$

(2) 首項 $a_1=-3$

(3) $a_8=a_1+7d=(-3)+7\times2=11$

(4) 前 6 項的總和為

$$\frac{6\times[2a_1+(6-1)\times d]}{2}$$

$$=\frac{6\times[2\times(-3)+5\times2]}{2}=12$$

2. (1) 設首項 a_1，公比 r

$$\begin{cases}a_3=a_1r^2=20\\a_5=a_1r^4=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1=80\\r=\pm\frac{1}{2}(\text{取正})\end{cases}$$

則公比 $r=\frac{1}{2}$

(2) 首項 $a_1=80$

(3) $a_8=a_1r^7$

$$=80\times\left(\frac{1}{2}\right)^7=80\times\frac{1}{128}=\frac{5}{8}$$

(4) 前 6 項的總和為

$$\frac{a_1(1-r^6)}{1-r}=\frac{80\times\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^6\right]}{1-\frac{1}{2}}=\frac{315}{2}$$

3. $\sum_{k=1}^{4}(3^k-3k+3)$

$=(3^1-3\times1+3)+(3^2-3\times2+3)$
$\quad+(3^3-3\times3+3)+(3^4-3\times4+3)$

$=3+6+21+72=102$

4. 已知座位數公差 $d=2$

設第 n 排座位數為 a_n

$a_7=a_1+6d \Rightarrow 30=a_1+6\times2 \Rightarrow a_1=18$

座位總數為 $\dfrac{15\times[2a_1+(15-1)\times d]}{2}$

$$=\frac{15\times(2\times18+14\times2)}{2}=480$$

故共有 480 個座位

5. $S_1+S_2+S_3+S_4+S_5$

$$=6^2+\left(\frac{6}{2}\right)^2+\left(\frac{6}{2^2}\right)^2+\left(\frac{6}{2^3}\right)^2+\left(\frac{6}{2^4}\right)^2$$

$$=\frac{6^2\times\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^5\right]}{1-\frac{1}{4}}$$ (註：首項為 6^2，公比為 $\frac{1}{4}$)

$$=\frac{3069}{64}\text{(平方公分)}$$

單元 4 坐標與函數

★ 國中基礎能力檢定 P.38

簡答

1. -3　2. (C)　3. 45　4. $(0,3)$　5. $\frac{12}{5}$

6. $y=\frac{1}{2}(x-1)^2+2$　7. (B)　8. (D)　9. 15　10. 2

11. -1.6　12. $(-12,17)$

詳解

1. 所求為 $f(1)+f(2)+f(-3)$

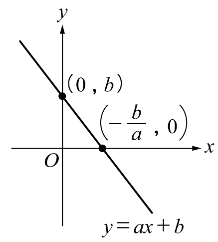
$=(3\times1-1)+(3\times2-1)+[3\times(-3)-1]$

$=2+5+(-10)$

$=-3$

2.

x	0	$-\frac{b}{a}$
y	b	0



其中 $b>0$，$-\frac{b}{a}>0$

如右圖，$y=ax+b$ 圖形

不通過第三象限

故選(C)

3. $\begin{cases} f(66)=66a+b=89 \\ f(99)=99a+b=111 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} a=\frac{2}{3} \\ b=45 \end{cases}$

$\therefore f(x)=\frac{2}{3}x+45$

故所求 $f(0)=45$

4. ① 水平直線 $\Rightarrow a=0$

② 又通過 $(-4,3) \Rightarrow b=3$

故所求數對 $(a,b)=(0,3)$

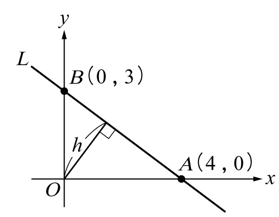
5. $L：3x+4y-12=0$

x	0	4
y	3	0

直線 L 與坐標軸交於 $A(4,0)$，$B(0,3)$

令 O 到 L 的最小距離為 h

如右圖



$h=\dfrac{\overline{OA}\times\overline{OB}}{\overline{AB}}$

$=\dfrac{4\times3}{5}=\dfrac{12}{5}$

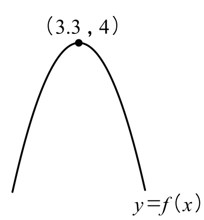
6. 由頂點 $(1,2)$ 代入 $y=a(x-h)^2+k$

得 $y=a(x-1)^2+2$

過 $(3,4)$，代入得 $4=4a+2 \Rightarrow a=\frac{1}{2}$

所求為 $y=\frac{1}{2}(x-1)^2+2$

7. $y=f(x)=-2(x-3.3)^2+4$ 的圖形開口向下，頂點為 $(3.3,4)$

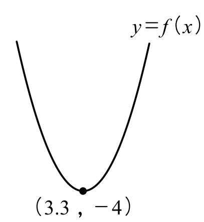


若 x 值愈靠近 3.3，

則 $f(x)$ 值愈大

故選(B)

8. $y=f(x)=2(x-3.3)^2-4$ 的圖形開口向上，頂點為 $(3.3,-4)$



若 x 值離 3.3 愈遠，

則 $f(x)$ 值愈大

故選(D)

9. 令 $y=0$

$\Rightarrow x^2+9x-36=0$

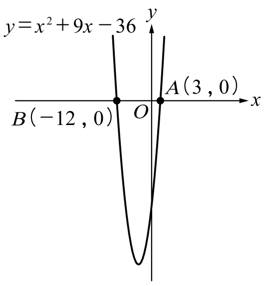
$\Rightarrow (x-3)(x+12)=0$

$\Rightarrow x=3$ 或 $x=-12$

設 $A(3，0)$，$B(-12，0)$

則 $\overline{AB}$ 的長度為

$|3-(-12)|=15$



10. $y=x^2+3 \xrightarrow{\text{向右平移 } k \text{ 單位}} y=(x-k)^2+3$

過 $(0，7)$，代入得 $7=(0-k)^2+3$

$\Rightarrow k^2=4 \Rightarrow k=\pm 2$（取正 $\because k>0$）

所求 $k=2$

11. $20-0.6\times\dfrac{3600}{100}=-1.6$

故所求溫度為 -1.6 度

12. 由題圖可知 $y=2(x-3)^2-1=2(x^2-6x+9)-1$

$=2x^2-12x+17$

與 $y=2x^2+bx+c$ 同義

可得 $b=-12$，$c=17$

所求數對 $(b，c)=(-12，17)$

高中先修課程 P.42

例題 1

(1) $x=\dfrac{(-3)\times 2+11\times 5}{5+2}=7$

(2) 設 $P(x，y)$，則 $x=\dfrac{1\times 3+11\times 2}{2+3}=5$，

$y=\dfrac{(-3)\times 3+12\times 2}{2+3}=3$

故點 $P(5，3)$

練習 1

(1) $x=\dfrac{3\times 1+(-9)\times 2}{2+1}=-5$

(2) 設 $Q(x，y)$

則 $x=\dfrac{(-3)\times 3+4\times 4}{4+3}=1$，

$y=\dfrac{2\times 3+9\times 4}{4+3}=6$

故點 $Q(1，6)$

例題 2

(1) $f(x)=(x^2+4x)+3=(x^2+2\cdot 2\cdot x+2^2)+3-2^2$

$=(x+2)^2-1$

$\therefore$ 頂點為 $(-2，-1)$

(2) $f(x)=-(x^2-2x)+5$

$=-(x^2-2\cdot 1\cdot x+1^2)+5+1^2$

$=-(x-1)^2+6$

$\therefore$ 頂點為 $(1，6)$

(3) $f(x)=3(x^2-6x)-27$

$=3(x^2-2\cdot 3\cdot x+3^2)-27-3\cdot 3^2$

$=3(x-3)^2-54$

$\therefore$ 頂點為 $(3，-54)$

練習 2

(1) $f(x)=(x^2-4x)+9$

$=(x^2-2\cdot 2\cdot x+2^2)+9-2^2$

$=(x-2)^2+5$

$\therefore$ 頂點為 $(2，5)$

(2) $f(x)=-(x^2+2x)+5$

$=-(x^2+2\cdot 1\cdot x+1^2)+5+1^2$

$=-(x+1)^2+6$

$\therefore$ 頂點為 $(-1，6)$

(3) $f(x)=-2(x^2+x)-2$

$=-2\left[x^2+2\cdot\dfrac{1}{2}\cdot x+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\right]-2+2\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$

$=-2\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{3}{2}$

$\therefore$ 頂點為 $\left(-\dfrac{1}{2}，-\dfrac{3}{2}\right)$

先修銜接能力檢定 P.44

簡答

1. 3　2. -20　3. $(3，1)$　4. $(-5，9)$

5. (1) $(-2，-1)$；(2) $\left(\dfrac{1}{2}，-\dfrac{7}{4}\right)$；

(3) $\left(-\dfrac{3}{2}，-\dfrac{15}{2}\right)$；(4) $\left(\dfrac{1}{6}，\dfrac{25}{12}\right)$

6. 168　7. 6　8. 450

詳解

1. $x=\dfrac{(-5)\times 3+15\times 2}{2+3}=3$

2. 依題意 $\dfrac{a+18}{2}=-1$

$\Rightarrow a=-20$

3. 設 $Q(x，y)$

則 $x=\dfrac{1\times 5+13\times 1}{1+5}=3$

$y=\dfrac{(-2)\times 5+16\times 1}{1+5}=1$

故點 $Q(3，1)$

4. 依題意，$\begin{cases}\dfrac{a+3}{2}=-1\\[2mm]\dfrac{-5+b}{2}=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-5\\b=9\end{cases}$

故數對 $(a，b)=(-5，9)$

5. (1) $x^2+4x+3=(x^2+2\cdot2\cdot x+2^2)+3-2^2$

$=(x+2)^2-1$

∴數對$(p，q)=(-2，-1)$

(2) $-x^2+x-2$

$=-(x^2-x)-2$

$=-\left[x^2-2\cdot\frac{1}{2}\cdot x+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]-2+\left(\frac{1}{2}\right)^2$

$=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{7}{4}$

∴數對$(p，q)=\left(\frac{1}{2}，-\frac{7}{4}\right)$

(3) $2x^2+6x-3=2(x^2+3x)-3$

$=2\left[x^2+2\cdot\frac{3}{2}\cdot x+\left(\frac{3}{2}\right)^2\right]-3-2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2$

$=2\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{15}{2}$

∴數對$(p，q)=\left(-\frac{3}{2}，-\frac{15}{2}\right)$

(4) $-3x^2+x+2=-3\left(x^2-\frac{1}{3}x\right)+2$

$=-3\left[x^2-2\cdot\frac{1}{6}\cdot x+\left(\frac{1}{6}\right)^2\right]+2+3\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2$

$=-3\left(x-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{25}{12}$

∴數對$(p，q)=\left(\frac{1}{6}，\frac{25}{12}\right)$

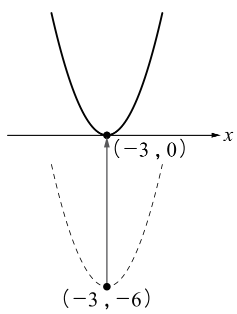
6. $f(x)=2x^2-8x+m=2(x^2-4x)+m$

$=2(x-2)^2+m-8$

當 $x=2$ 時，$f(x)$有最小值 $m-8$

即 $m-8=160\Rightarrow m=168$

7. $y=x^2+6x+3$



$\Rightarrow y=(x+3)^2-6$

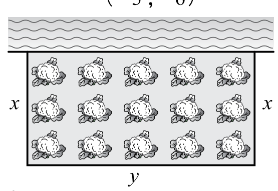
頂點為$(-3，-6)$

上移 6 單位，

新圖形和 x 軸恰交於一點

故所求 $k=6$

8. 如右圖，設長方形的兩邊分別為 x，y 公尺



$\Rightarrow 2x+y=60$

面積為 xy

$=x(60-2x)=-2x^2+60x$

$=-2(x^2-30x)$

$=-2(x-15)^2+450$

當 $x=15$ 時，有最大值 450

故最大面積為 450 平方公尺

綜合能力檢定 P.47

簡答

1. 10.94　2. 26　3. $(6，-3)$　4. (D)(E)　5. (D)

詳解

1. 依題意 $5.97=k\times50+1\Rightarrow k=\frac{4.97}{50}$

可得 $p=\frac{4.97}{50}\times d+1$

當 $d=100$ 代入

$\Rightarrow p=\frac{4.97}{50}\times100+1$

$=10.94$(個大氣壓)

2. $f(x)=(x-2)^2+x^2+(x+5)^2$

$=3x^2+6x+29$

$=3(x^2+2x)+29$

$=3(x+1)^2+26$

當 $x=-1$ 時，$f(x)$有最小值 26

3. 設 $P(x，y)$

則 $x=\frac{1\times3+9\times5}{5+3}=6$，

$y=\frac{2\times3+(-6)\times5}{5+3}=-3$

故點 $P(6，-3)$

4. $f(x)=2x^2+4x+k$

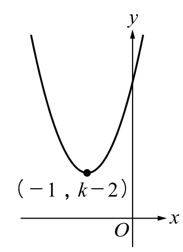
$=2(x^2+2x)+k$

$=2(x^2+2\cdot1\cdot x+1^2)+k-2\cdot1^2$

$=2(x+1)^2+k-2$

則頂點為$(-1，k-2)$

如右圖



二次函數圖形和 x 軸沒有交點

$\Rightarrow$頂點$(-1，k-2)$在 x 軸上方

$\Rightarrow k-2>0$

$\Rightarrow k>2$

故選(D)(E)

5. 依題意 $|p-2|:|p-10|=\sqrt{7}:\sqrt{6}=1:\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}}$

$|q-2|:|q-10|=\sqrt{8}:\sqrt{7}=1:\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{8}}$

$|r-2|:|r-10|=\sqrt{6}:\sqrt{5}=1:\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$

$\because\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}<\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}}<\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{8}}$

∴r 最靠近 10，其次為 p，再其次為 q

得 $r>p>q$

故選(D)

單元 5 三角比

★ 國中基礎能力檢定 P.52

簡答

1. 132　2. 110　3. 17　4. $\sqrt{5}$　5. 100

6. (1) $\frac{22}{3}$；(2) $\frac{4}{9}$　7. $2\sqrt{6}$　8. 144　9. $\frac{5}{2}$　10. 8

11. (1) $\frac{3}{5}$；(2) $\frac{4}{5}$；(3) $\frac{3}{4}$；(4) $\frac{4}{5}$；(5) $\frac{3}{5}$；(6) $\frac{4}{3}$

12. (1) $\sqrt{29}$；(2) $\sqrt{41}$

詳解

1. $\angle BAC=\frac{(5-2)\times180^\circ}{5}=108^\circ$

$\angle BAD=\frac{(6-2)\times180^\circ}{6}=120^\circ$

故 $\angle CAD=360^\circ-108^\circ-120^\circ$
$=132^\circ$

2. 依外角定理得
$\theta=50^\circ+(180^\circ-120^\circ)=110^\circ$

3. ∵三角形任意兩邊和大於第三邊，且任意兩邊差小於第三邊
可知 $16-9<x-5<16+9$
$\Rightarrow 12<x<30$
∴滿足條件的 x 可以是 13，14，15，……，29，共 17 個

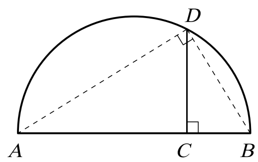
4. 由畢氏定理，依序求得
$\overline{OB}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$
$\Rightarrow \overline{OC}=\sqrt{1^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{3}$
$\Rightarrow \overline{OD}=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{4}$
$\Rightarrow \overline{OE}=\sqrt{1^2+(\sqrt{4})^2}=\sqrt{5}$
故 $\overline{OE}=\sqrt{5}$

5. 正方形 $ACHI$ 面積為 $\overline{AC}^2$
$=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2$
$=36+64$
$=100$

6. (1) $\overline{AD}:\overline{AB}=6:9=2:3$
$\overline{AE}:\overline{AC}=8:12=2:3$
$\Rightarrow \overline{AD}:\overline{AB}=\overline{AE}:\overline{AC}$
$\Rightarrow \triangle ADE\sim\triangle ABC$
可得 $\overline{DE}:\overline{BC}=2:3$
$\Rightarrow \overline{DE}:11=2:3\Rightarrow \overline{DE}=\frac{22}{3}$

(2) $\triangle ADE$ 面積與 $\triangle ABC$ 面積的比值為
$\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$

7. 如右圖，作 $\overline{AD}$，$\overline{BD}$ 連線，依直角三角形母子相似定理可得

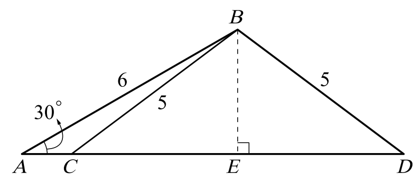


$\overline{CD}^2=\overline{AC}\times\overline{BC}$
$=8\times3=24$
故 $\overline{CD}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$

8. $\angle1=180^\circ-108^\circ=72^\circ$
故 $\angle2=2\angle1=2\times72^\circ$
$=144^\circ$

9. 依內分比性質得
$\overline{BD}:\overline{DC}=\overline{BA}:\overline{AC}=5:7$
故 $\overline{BD}=\frac{5}{5+7}\times\overline{BC}$
$=\frac{5}{12}\times6=\frac{5}{2}$

10. 如下圖，由 B 向 $\overline{AD}$ 作垂直線，垂足為 E

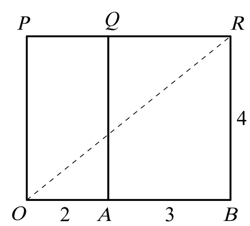


則 $\overline{BE}=\overline{AB}\times\frac{1}{2}=6\times\frac{1}{2}=3$
故 $\overline{CD}=2\times\sqrt{5^2-3^2}=2\times4=8$

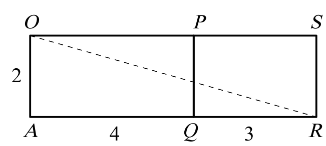
11. (1) $\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\frac{3}{5}$；(2) $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\frac{4}{5}$；(3) $\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}=\frac{3}{4}$；
(4) $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\frac{4}{5}$；(5) $\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\frac{3}{5}$；(6) $\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=\frac{4}{3}$

12. (1) 空間中，$\overline{OR}=\sqrt{2^2+3^2+4^2}=\sqrt{29}$ 為最短路徑長

(2) 將長方體展開成平面，考慮下列兩個情形

①


$\Rightarrow \overline{OR}=\sqrt{(2+3)^2+4^2}=\sqrt{41}$

②


$\Rightarrow \overline{OR}=\sqrt{(4+3)^2+2^2}=\sqrt{53}$

綜合①、②，最短路徑長為 $\sqrt{41}$

高中先修課程 P.55

例題 1

(1) 底邊上的高為 $\sqrt{15^2-9^2}=12$
故 $x=\sqrt{13^2-12^2}=5$

解答篇

(2) $\begin{cases} m^2-n^2=6^2-3^2=27 \\ m^2+n^2=6^2+3^2=45 \\ 2mn=2\times6\times3=36 \end{cases}$

故三邊長為 27，36，45

練習 1

(1) $x=(3\times\sqrt{3})\times2=6\sqrt{3}$

(2) $\begin{cases} m^2-n^2=5^2-1^2=24 \\ m^2+n^2=5^2+1^2=26 \\ 2mn=2\times5\times1=10 \end{cases}$

故三邊長為 10，24，26

例題 2

(1) $\sin^2 23^\circ+\sin^2 37^\circ+\cos^2 23^\circ+\cos^2 37^\circ$
$=(\sin^2 23^\circ+\cos^2 23^\circ)+(\sin^2 37^\circ+\cos^2 37^\circ)$
$=1+1=2$

(2) 由 $2\sin\theta=3\cos\theta \Rightarrow \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{3}{2}$
$\Rightarrow \tan\theta=\dfrac{3}{2}$

(3) $\sin 23^\circ=\sin(90^\circ-67^\circ)=\cos 67^\circ$
故選(C)

練習 2

(1) 所求為 $1-\cos^2\theta=\sin^2\theta=\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{1}{9}$

(2) 由 $3\cos\theta-\sin\theta=0$
$\Rightarrow 3\cos\theta=\sin\theta \Rightarrow \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{3}{1} \Rightarrow \tan\theta=3$

(3) $\cos 37^\circ=\cos(90^\circ-53^\circ)=\sin 53^\circ$
故選(B)

先修銜接能力檢定 P.58

簡答

1. 289　2. (1) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$；(2) $\dfrac{1}{2}$；(3) $\sqrt{3}$

3. (1) 10；(2) $\dfrac{5}{13}$；(3) $\dfrac{5}{12}$　4. 12.59　5. 6

6. $\sqrt{1-t^2}$　7. $\dfrac{5}{12}$　8. $2\dfrac{1}{2}$

詳解

1. 正方形的面積為 $15^2+8^2=289$

2. (1) $\sin 60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(2) $\cos 60^\circ=\dfrac{1}{2}$

(3) $\tan 60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{1}$
$=\sqrt{3}$

3. (1) $x=\sqrt{26^2-24^2}$
$=10$

(2) $\sin A=\dfrac{10}{26}=\dfrac{5}{13}$

(3) $\tan A=\dfrac{10}{24}=\dfrac{5}{12}$

4. $\tan 40^\circ=\dfrac{h}{15} \Rightarrow 0.8391\approx\dfrac{h}{15}$
$\Rightarrow h\approx15\times0.8391$
≈12.5865
≈12.59

5. 設路燈 h 公尺
$3:(3+7)=1.8:h$
$\Rightarrow 3h=18$
$\Rightarrow h=6$
故路燈高度為 6 公尺

6. 依平方關係公式得 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$
$\Rightarrow \sin^2\theta=1-\cos^2\theta$
$\Rightarrow \sin^2\theta=1-t^2$
$\Rightarrow \sin\theta=\pm\sqrt{1-t^2}$（取正　$\because 0<\sin\theta<1$）
故 $\sin\theta=\sqrt{1-t^2}$

7. $\dfrac{\cos\theta+2\sin\theta}{\cos\theta-2\sin\theta}=11$
$\Rightarrow \cos\theta+2\sin\theta=11\cos\theta-22\sin\theta$
$\Rightarrow 24\sin\theta=10\cos\theta$
$\Rightarrow \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{10}{24}$
$\Rightarrow \tan\theta=\dfrac{5}{12}$

8. $\sin^2 15^\circ+\sin^2 25^\circ+\sin^2 45^\circ+\sin^2 65^\circ+\sin^2 75^\circ$
$=(\sin^2 15^\circ+\sin^2 75^\circ)+(\sin^2 25^\circ+\sin^2 65^\circ)$
$+\sin^2 45^\circ$
$=(\sin^2 15^\circ+\cos^2 15^\circ)+(\sin^2 25^\circ+\cos^2 25^\circ)$
$+\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$
$=1+1+\dfrac{1}{2}$
$=2\dfrac{1}{2}$

綜合能力檢定 P.60

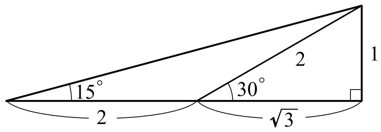
簡答

1. $2-\sqrt{3}$　2. 6　3. 24　4. $\dfrac{4}{5}$

5. $60\sqrt{3}+60\sqrt{2}$

詳解

1. 如右圖

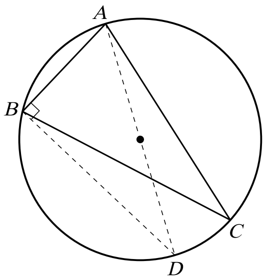


$\tan 15^\circ=\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$

$=2-\sqrt{3}$

2. 設圓半徑為 R

如下圖，作直徑 $\overline{AD}$



$\angle ADB=\angle ACB=30^\circ$

在$\triangle ABD$ 中，$\angle ABD=90^\circ$

（半圓內圓周角 90°）

$\sin 30^\circ=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AD}} \Rightarrow \dfrac{1}{2}=\dfrac{6}{2R} \Rightarrow R=6$

故外接圓半徑為 6

3. 斜邊為 $\sqrt{6^2+8^2}=10$

鋪色部分面積為

$\dfrac{1}{2}\times 3^2\pi+\dfrac{1}{2}\times 4^2\pi-\left(\dfrac{1}{2}\times 5^2\pi-\dfrac{6\times 8}{2}\right)=24$

（註：鋪色部分面積＝直角三角形面積）

4. $2\sin\theta-\cos\theta-1=0$

$\Rightarrow \cos\theta=2\sin\theta-1$

$\xrightarrow{\text{平方}} \cos^2\theta=(2\sin\theta-1)^2$

$\Rightarrow 1-\sin^2\theta=4\sin^2\theta-4\sin\theta+1$

$\Rightarrow 5\sin^2\theta-4\sin\theta=0$

$\Rightarrow \sin\theta(5\sin\theta-4)=0$

$\Rightarrow \sin\theta=0$（不合）或 $\sin\theta=\dfrac{4}{5}$

故所求 $\sin\theta=\dfrac{4}{5}$

5. 設木棍 $\overline{AB}=\overline{A'B'}=x$ 公分

$\Rightarrow \begin{cases} \overline{BC}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}x \\ \overline{B'C}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x \end{cases}$

則 $\overline{B'C}-\overline{BC}=30$

$\Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2}x-\dfrac{1}{\sqrt{2}}x=30$

$\Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}x=30$

$\Rightarrow x=\dfrac{60}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

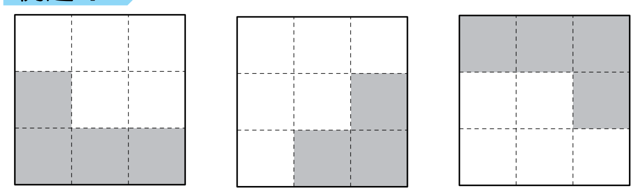
$=60(\sqrt{3}+\sqrt{2})$

$=60\sqrt{3}+60\sqrt{2}$

故木棍長度為 $60\sqrt{3}+60\sqrt{2}$ 公分

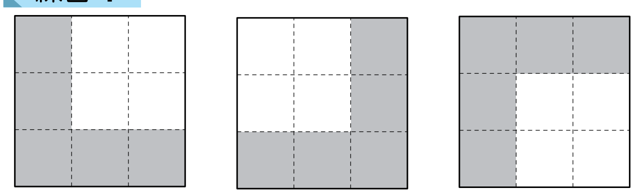
單元 6 立體圖與三視圖

例題 1



前視圖　右視圖　俯視圖

練習 1



前視圖　右視圖　俯視圖

例題 2

(C)

練習 2

(A)

Notes

Notes

高中數學先修教材

編 著 者：黃天賜
主　　編：李遠菡
企劃編輯：高湘婷
責任編輯：吳崇欽．吳　界
美術編輯：方淑莉．蔡佳岐
封面設計：黃屛慈
插　　畫：鄭妃雅．周秋慧．黃慧貞
出 版 者：翰林出版事業股份有限公司
印 刷 者：翰林出版事業股份有限公司

總 公 司：70248 臺南市南區新樂路 76 號
電話：(06)2631188
傳眞：(06)2640416

教材勘誤：翰林官網／Q&A專區／勘誤啟事

翰林官網：http://www.hle.com.tw

網路購書

翰林書城：http://books.hanlin.com.tw

書城提供 ATM、線上刷卡及貨到付款的服務，建議您可以直接至翰林書城訂購，約 3 ～ 4 個工作天即可收到書（不含假日）。

讀者服務

客服專線：(06)2637923

客服信箱：hlservice@hanlin.com.tw

本書如有缺頁、倒裝、漏印、嚴重汙損等情形，請接受本公司誠摯的道歉；並請撥打客服專線告知，我們將迅速爲您服務。